Recapitulare finală - Chestiuni de examen

12 E

- Cercul prof. de matem. - 1
- 19. 05. 2025
- Prof. Diaconu Daniela

Subiectul I

- Mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$.
- Funcții
- Ecuații
- Elemente de geometrie analitică
- Elemente de trigonometrie.

1.1. Arătați că $(1+i)^2 - 2i = 0$.

1.2. Determinați numerele reale a și b pentru care $(a+bi)(i-1)=2$.

1.3. Demonstrați că numărul $a = \left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg.

1.4. Determinați numărul complex z dacă:
$3 \cdot z + 2 \cdot \bar{z} = 5 + 2i$.

2.1. Determinați numărul real nenul m știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 8x - 7$ este egală cu 12.

2.2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(2a, a)$ aparține graficului funcției f.

2.3. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 1$ cu axa Ox.

2.4. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Arătați că $f(a) + g(a) = 2$, pentru orice număr real a.

3.1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: ©

$\sqrt{2x-1} = x-2$.

3.2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$3x - \sqrt[3]{x^3+x^2-9} = 2x$.

3.3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$5^{x+1} - 3\cdot 5^{x} = 2$.

3.4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$\log_4 (x^2+4) = \log_4 (6x-4)$.

4.1. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, numărul 2^n să fie divizibil cu 16.

4.2. Determinați câte submulțimi cu 2 elemente are mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4.3. Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.

4.4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, acesta să verifice inegalitatea $|a+1| > 2$.

5.1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,4)$. Determinați coordonatele punctului C astfel încât punctul A să fie mijlocul segmentului BC.

5.2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(3, a)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.

5.3 Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x+2y-1=0$.

5.4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(2,4)$. Arătați că triunghiul OAB este dreptunghic în A.

6.1. Determinați $\sin x$, știind că $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$.

6.2 Se consideră expresia $E(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$, unde x este număr real. Arătați că $E(\frac{\pi}{4}) = 0$.

6.3 Arătați că, pentru orice număr real x, $\cos(x+\frac{\pi}{3}) + \cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos x$

6.4 Calculați $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Subiectul al II-lea – II.1.

- Operații cu matrice
- Calculul determinanților de ordin 2 și 3
- Matrice inversabilă. Inversa unei matrice.
- Rezolvarea sistemelor. Regula lui Cramer.

II.1.1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-3 & 4a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(B(1)) = 7$.

b) Arătați că $B(2) - B(0) \cdot B(1) = 4 \cdot A$

c) Determinați numărul real a pentru care matricea $C(a) = B(a) - a \cdot A$ nu este inversabilă.

II.1.2. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ și sistemul (4)

de ecuații $\begin{cases} 4x+y+m\cdot z=9 \\ x+2y-z=4 \\ -2x-3y=-7 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det(A(m))=m-10$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

b) Determinați inversa matricei $A(9)$

c) Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

II.1.3. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} a\cdot x+y+(a+1)\cdot z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det(A(1))=-9$.

b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

c) Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0) atunci $x_0+y_0+z_0=2$

Subiectul al II-lea — II.2

· Legi de compoziție.

II.2.1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+5xy+y$.

a) Verificați dacă $e=0$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$".

b) Demonstrați că $x \circ y = 5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați partea întreagă a numărului

$q=\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2025}\right)$.

II.2.2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = xy-\sqrt{2}(x+y-1)+$

a) Arătați că $\sqrt{2}\circ 0=\sqrt{2}$.

b) Determinați numerele reale x pentru care

$(x-\sqrt{2})\circ(x+\sqrt{2})=x$.

c) Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „$\circ$" este număr rațional.

II.2.3. Pe mulțimea $M=(0;\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = x+y+1-\sqrt{xy+1}$.

a) Arătați că $1*8=7$.

b) Determinați $x\in M$ pentru care $x*\frac{3}{x}=x$.

c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care

$\left(n*(n+2)\right)*(n+4)>\frac{n^2}{2}$.

Subiectul al III-lea — III.1

- Limite de funcții. Rezolvarea nedeterminărilor $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$
- Formule de derivare
- Ecuația tangentei la graficul funcției f într-un punct de abscisă dată de pe grafic.

· Rolul derivatei întâi în studiul variației funcțiilor (intervale de monotonie, puncte de extrem)

III.1.1. Se consideră funcția $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-2\cdot\ln(x+1)$

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x+1}$, $x\in(-1;\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f

c) Arătați că $x^2-x\geq 2\cdot\ln\frac{x+1}{2}$, pentru $\forall\, x\in(-1;\infty)$.

III.1.2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot(x^2+2x-2)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x\cdot(x^2+4x)$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1$

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f

III 1.3. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\cdot\ln(x^2+1)\right)$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $x\in(0;\infty)$.

b) Determinați numărul natural nenul n, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(n, f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=\frac{1}{5}\cdot x+1$.

c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

Subiectul al III-lea — III.2

· Primitive

· Formule de integrare

. Metode de integrare

III.2.1 Se consideră funcția $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^2 (x+1)\cdot f(x)\,dx = 8$.

b) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = 1+2\ln 2$

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 (x^2-1)\cdot e^x\cdot f(x)\,dx$ $= e(e+a)$.

III.2.2 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4\cdot x^3+3x^2+2x+1$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=1$

c) Arătați că, pentru orice număr real nenul a, are loc relația $\int_0^a f(x)\,dx + \frac{1}{a}\cdot\int_a^0 f(x)\,dx = a^4-1$.

III 2.3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot(x^2-4x+5)$.

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \frac{10}{3}$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

c) Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\cdot(ax^2+bx+c)$ să fie o primitivă a funcției f.